Méthode itérative pour les systèmes linéaires

Lemme de Householder Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$.

Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que sa norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $|||A||| < \rho(A) + \varepsilon$.

Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc A est trigonalisable.

Il existe donc T triangulaire et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que : $T = P^{-1}AP$.

Pour $\delta \geq 0$ on définit $D_\delta := \mathrm{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$. On a alors :

$$D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta = D_\delta^{-1} T D_\delta$$

$$= \begin{pmatrix} t_{1,1} & \delta t_{1,2} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & \delta t_{n-1,n} \\ & & & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit sur $\mathbb{C}^n$ la norme

$$\|x\| := \|(PD_\delta)^{-1} x\|_\infty$$

On a alors pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$|||B||| = \sup\{\|Bx\|, \|x\| \leq 1\}$$

$$= \sup\{\|(PD_\delta)^{-1}Bx\|_\infty, \|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty \leq 1\}$$

$$= |||(PD_\delta)^{-1}B(PD_\delta)|||_\infty$$

après changement de variables $y = (PD_\delta)^{-1}x$

Or $|||M|||_\infty = \sup_i \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$. On choisit donc $\delta > 0$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} |t_{i,j}| < \varepsilon$.

De plus, $\rho(A) = \rho(T) = \sup_i |t_{i,i}|$. Donc :

$$|||A||| = |||(PD_\delta)^{-1}A(PD_\delta)||| = \sup_i \sum_{j=i}^n \delta^{j-i}|t_{i,j}| \leq \sup_i |t_{i,i}| + \sup_i \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i}|t_{i,j}|$$

$$< \rho(A) + \varepsilon$$

Théorème Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et x l'unique solution de $Ax = b$. On suppose que A se décompose sous la forme $M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit la suite des itérés (x_k) par $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$.

La méthode est convergente si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le vecteur erreur $e_k := x_k - x$, de sorte que $(x_k)_k$ converge si et seulement si $(e_k)_k$ tend vers 0.

On a :

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x = M^{-1}(Nx_k + b) - x = M^{-1}N(x_k - x) = M^{-1}N e_k$$

$Ax = b \Rightarrow Mx = Nx + b$

$\Rightarrow x - M^{-1}b = M^{-1}Nx$

Donc : $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$.

Supposons que $\rho(M^{-1}N) < 1$.

En posant $\varepsilon = 1 - \rho(M^{-1}N) > 0$ et en utilisant le lemme, il existe une norme $\|\cdot\|$ telle que $|||M^{-1}N||| < 1$.

$|||M^{-1}N||| < \rho(M^{-1}N) + \varepsilon = 1$

Ainsi :

$$\|e_k\| \leq |||M^{-1}N|||^k . \|e_0\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \quad \text{quelque soit } x_0$$

Supposons que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$.

Alors $M^{-1}N$ admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| \geq 1$.

Soit v un vecteur propre associé, qui vérifie donc : $(M^{-1}N)^k v = \lambda^k v$.

Comme $|\lambda| \geq 1$, la suite $(\lambda^k v)_k$ ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{C}^n$.

En écrivant

$$v = \alpha + i\beta \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$$ rien n'assure que $v \in \mathbb{R}^n$

on a donc $(M^{-1}N)^k v = (M^{-1}N)^k \alpha + i(M^{-1}N)^k \beta$; et ainsi $(M^{-1}N)^k \alpha$ ou $(M^{-1}N)^k \beta$ ne converge pas vers 0.

Donc une des méthodes issue de $x_0 = x + \alpha$ ou $x_0 = x + \beta$ ne converge pas.